264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

I Variables aléatoires discrètes

1) Notion de variables aléatoires discrètes.

Définition 1: Une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une v.a X telle que $X(\Omega)$ est un ensemble réel fini ou dénombrable.

Exemple 2: On peut modéliser un tirage à pile ou face par une v.a $X : \Omega \to \{0,1\}$ vérifiant $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.

Définition 3: La loi d'une v.a discrète X est la probabilité image $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ i.e $\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{A} \mapsto \mathbb{P}(X \in A) \in [0,1]$.

Proposition 4: La loi d'une v.a discrète X d'image $\{x_k, k \in K\}$ est entièrement caractérisé par les probabilités atomiques $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ i.e pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{k, x_k \in A} \mathbb{P}(X = x_k)$.

Exemple 5 Deux v.a discrètes X et Y peuvent avoir la même loi sans être égale. Avec $X : \Omega \to \{0,1\}$ vérifiant $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X=0)$ et $Y : \Omega \to \{-1,0,1\}$ vérifiant $\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y=1)$ et $\mathbb{P}(Y=-1) = 0$, X et Y ont même loi et $X \neq Y$.

Exemple 6: Un athlète doit sauter une succession de haies. La proba de passer la n-ième est $p_n = 1/n$. On note X le numéro de la dernière haie franchie avec succès. X est définie p.s i.e l'athlète s'arrêtera p.s

2) Lois classiques

Définition 7: Une v.a X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, notée $X \sim \mathcal{B}(p)$, lorsque $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$. Elle modélise une expérience n'ayant que deux issues possibles, succès et échec.

Exemple 8 • Pour tout $A \in \Omega$, $\mathbb{1}_A \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

• Soit Y une v.a réelle. $X = \mathbb{1}_{\{Y \geq 0\}} \sim \mathcal{B}(\mathbb{P}(Y \geq 0))$

Proposition 9 Les lois de Bernoulli sont exactement les indicatrices d'évènements.

Définition 10: Une v.a X suit une loi uniforme sur E un ensemble fini si $\forall x \in E$, $\mathbb{P}(X = x) = 1/|E|$ et $\forall x \notin E$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$

Exemple 11: Le résultat du lancer d'un dé non truqué suit une $\mathcal{U}(\{1, \dots, 6\})$

Définition 12: Une v.a X suit une loi binomiale, notée $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, si pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple 13: On lance n fois une pièce équilibrée. Le nombre de pile obtenus suit $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

Définition 14: Une v.a X suit une loi géométrique, notée $X \sim \mathcal{G}(p)$, si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

Exemple 15: On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtention du premier pile. Le nombre de lancers effectués suit $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

Théorème 16: Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Alors X vérifie la propriété de non-vieillissement : $\forall k, l \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > k + l \mid X > l) = \mathbb{P}(X > k)$. C'est la seule loi discrète vérifiant cette propriété.

Exemple 17: La proba d'attendre 5 lancers avant le premier succès est la même que celle de devoir attendre 15 lancers lorsque les 10 premiers ont échoué.

Définition 18: On dit que X suit une loi de Poisson, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$ si : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Remarque 19 Elles permettent de modéliser de nombreuses situations où l'on découpe un intervalle de temps en intervalles indéfiniments petits. Par exemple, le nombre de clients se présentant à une caisse durant un temps T.

Proposition 20: Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors $\mathbb{P}(X \text{ impair}) < \mathbb{P}(X \text{ pair})$

II Espérance et fonction génératrice

1) Espérance et moments

Définition 21 : Soit X une v.a discrète avec $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$. Si la série $\sum |x_k| \mathbb{P}(X = x_k)$ converge, on dit que X admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, définie par : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$.

Exemple 22 : • Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$

• Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$. • Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.

• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Théorème 23 (de transfert)

Soient X une v.a discrète et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. La v.a $\varphi(X)$ admet une espérance ssi $\sum \varphi(x_k) \mathbb{P}(X=k)$ converge absolument. Si c'est le cas, $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi(x_k) \mathbb{P}(X=k)$.

Exemple 24 : Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}(1/(1+X)) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

Définition 25 : On définit le moment d'ordre $m \in \mathbb{N}$ comme l'espérance de X^m, si elle existe.

Remarque 26 : Le moment d'ordre 1 est $\mathbb{E}(X)$.

Théorème 27 : Si X est une v.a discrète admettant un moment d'ordre $m \geq 2$, alors X admet des moments d'ordre $1, 2, \dots m$.

Définition 28 : On dit qu'une v.a discrète X admet une variance si elle admet un moment d'ordre 2. On définit sa variance comme $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$

Proposition 29 : Si X admet une variance alors $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Exemple 30 : Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

$X \sim \mathcal{B}(n,p) \to \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$ $\quad X \sim \mathcal{G}(p) \to \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \to \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Définition 31 : On appelle écart-type de X admettant une variance la quantité $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Remarque 32 : L'écart-type mesure la tendance qu'a X de s'écarter de sa moyenne.

Théorème 33 (Inégalité de Markov)

Soit X une v.a discrète et positive admettant une espérance. Pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$

Corollaire 34 : (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une v.a discrète admettant une variance. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$

Application 35 : Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors $\mathbb{P}(X \leq \frac{\lambda}{2}) \leq \frac{4}{\lambda}$ et $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$

2) Fonctions génératrices

Définition 36 : On appelle fonction génératrice d'une v.a X à valeurs dans $\mathbb{N}$ la fonction $z \mapsto G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) z^k$, définie sur $]-1, 1]$.

Remarque 37 : Si la loi de X est à support fini, alors G_X est un polynôme.

Théorème 38 : Si deux v.a X et Y sont indépendantes, alors on a : $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Exemple 39 : $X \sim \mathcal{B}(p) \Rightarrow G_X(z) = (1-p) + pz$.

$X \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow G_X(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$. $\quad X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow G_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

Théorème 40 : G_X est de classe C^∞ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$. En particulier, la fonction génératrice caractérise la loi.

Application 41 : Une somme de n v.a de loi $\mathcal{B}(p)$ suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Application 42. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ et X, Y indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

KUR

Exemple 43. Quelle que soit la façon dont on pipe deux dés, la somme de ces dés ne peut pas suivre une loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.

Théorème 44. $\mathbb{E}(X) < +\infty$ ssi G_X admet une dérivée à gauche en 1. Dans ce cas, $G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$.

III Comportements asymptotiques

1) Borel Cantelli et ses applications

Définition 45. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit : $\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m = \{A_n \text{ i.o}\}$

REZ + LED

Théorème 46 (Lemme de Borel-Cantelli) DEV 1 + 48 + 49.
Soit (A_n) une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

i) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ alors $\mathbb{P}(A_n \text{ i.o}) = 0$

ii) Si les A_n sont indépendants et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, alors $\mathbb{P}(A_n \text{ i.o}) = 1$.

Exemple 47. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a discrètes, $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum a_n$ et $\sum \mathbb{P}(X_n \neq a_n)$ convergent. Alors $\sum X_n$ est p.s convergente.

Application 48. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a et X une v.a. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon))$ converge. Alors $X_n \xrightarrow{p.s} X$.

Application 49. Il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\text{multiples de } n) = \frac{1}{n}$

2) Convergence en loi et TCL

LED +

Définition 50. Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a. On dit que X_n converge en loi vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si pour toute fonction continue bornée $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a : $\mathbb{E}(\phi(X_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}(\phi(X))$.

Théorème 51 : (Central limite) DEV 1 + 53
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a i.i.d admettant un moment d'ordre 2. Alors $\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X))$

KUR

Exemple 52. Si $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ alors pour tout $a < b$,
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \frac{X_1 + \dots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \int_a^b \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, dt.$$
(théorème de Moivre-Laplace)

Application 53. $\lim_{n \to +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$

APP	Appel	Probas pour les non-probas
REZ	Rezzouk	Exos de maths
LED	Ledoux	Probas
KUR	Kurtzmann	De l'inté aux probas